

Le první řešení a obecných rovníc:

A rovnice se separovanými prom.

je t. jednoduché:

Pokud  $y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$  a chceme

lepit  $\forall x_0 \in D$ , pak stačí aby existoval

$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) \in D_h$

Úplně stejně se lepší pro rovnice

$$f'(x) = f(x, g(x)) \quad \text{kde } f \text{ je spojitý}$$

$$[ \text{stačí aby } (x_0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) \in D_f ]$$

Používá se věta o jed. derivaci.

Pro rovnice n-tého řádu je to složitější:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

$f$  spojitá

$J \subset \mathbb{R}$  otevřená a  $b \in J$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y^{(i-1)}(x) = y_{i-1}$$

$$(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in D_f$$

1) Pak  $(n-1)$ -krát použít větu o jed. der.  
zajistí, že v bodě  $x_0$  ex.  $\gamma, \gamma', \dots, \gamma^{(n-1)}$   
a všechny jsou spojité.

2) Rovnice spolu s  $V_0 \cap D^{(*)}$  zajistí ex.  
a spojitost  $\gamma^{(n)}$  v  $x_0$  a že  $\gamma$  splňuje  
rovnici.

(\*) a spojitostí  $\gamma$ !

Nejsložitější jsou rovnice typu

$$g(y^{(n)}(x)) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

V tomto případě je třeba aby ex. vl.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y^{(n)}(x) = y_n$$

a aby  $y_n \in D_g$ .

Část 1) je jako výše, část 2)  
je jiná, Vodič zajišťuje že  $y^{(m)}(x_0) = y_m$ ,  
spojitost  $f$  a  $g$  zajišťují platnost rovnice.

Stejně se chová i obecná rovnice  
$$0 = F(x, y, \dots, y^{(n)})$$

Április  $\lambda$ -matrice se szögírtémi pol. :

$$\begin{pmatrix} 3\lambda^2 + 8\lambda + 10 \\ \lambda^2 + 3\lambda + 3 \end{pmatrix} \uparrow -3 \sim \begin{pmatrix} -\lambda + 1 \\ \lambda^2 + 3\lambda + 3 \end{pmatrix} \downarrow \lambda$$

$$\sim \begin{pmatrix} -\lambda + 1 \\ 4\lambda + 3 \end{pmatrix} \downarrow 4 \sim \begin{pmatrix} -\lambda + 1 \\ 7 \end{pmatrix} \uparrow -\frac{1-\lambda}{7} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 1) \quad u' &= u + v + z + w \\
 v' &= u + v + z + w + 1 \\
 z' &= u + v + z + w + 2 \\
 w' &= u + v + z + w + 3
 \end{aligned}$$

$\lambda$ -matrix  $m'$   $\uparrow$  var

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 & | & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda & | & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \nearrow \lambda-1 \\ \nearrow -1 \\ \nearrow -1 \\ \nearrow -1 \end{matrix} \sim$$



$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & \lambda & \lambda & -\lambda^2+2\lambda & 3 \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \nearrow \nearrow \\ \nearrow \nearrow \\ \nearrow \nearrow \\ \nearrow \nearrow \end{array} \begin{array}{l} +1 \\ +1 \\ +1 \\ \sim \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 4\lambda-\lambda^2 & 6 \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda & -3 \end{array} \right)$$

2. 1. Forderung:

$$w^{(1)} - 4w = -6$$

Char. pol.  $\lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4)$ , FS  $\lambda$

$$\{1, e^{4t}\}$$

$$-6 = e^0(-6 \cos(0) + 0 \sin(0)), \quad 0 \text{ je hören, hiedin}$$

$$\left. \begin{array}{l} w_p(t) = At \\ w_p'(t) = A \\ w_p''(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -4A = -6 \\ A = \frac{3}{2} \end{array}$$

Dobromedy  $w(t) = \frac{3}{2}x + C_1 + C_2 e^{4t}$

$$w'(t) = \frac{3}{2} + 4C_2 e^{4t}$$

Ze 2.  $\int \hat{n} dk$

$$-V' + w' = 2$$

$$v'(t) = w'(t) - 2$$

$$= 4C_2 e^{4t} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow v(t) = C_2 e^{4t} - \frac{t}{2} + C_3$$

Ze 3. Finden konstante:

$$-z'(t) + w'(t) = 1$$

$$z'(t) = w'(t) - 1$$

$$= c_2 e^{4t} + \frac{1}{2}$$

$$z(t) = c_2 e^{4t} + \frac{t}{2} + c_4$$

Ze 4. konstante:

$$u(t) + v(t) + z(t) + w(t) - w'(t) = -3$$

$$u(t) = c_1 e^{4t} - \frac{3}{2} t - c_1 - c_3 - c_4 - \frac{3}{2}$$

Obecní řešení:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \\ w \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{4t} & -1 & -1 \\ 0 & e^{4t} & 1 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 & 1 \\ 1 & e^{4t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot C + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t \\ \frac{3}{2}t \end{pmatrix}$$

Inverse rotation matrix:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} \cos(t) & \sin(t) & 1 & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot \cos(t)} \sim$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} \cos^2(t) & \sin(t)\cos(t) & \cos(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\sin(t)} \sim$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \downarrow \sin(t) \end{array}$$

$$\sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \cos(t) & \cos(t)\sin(t) & \cos^2(t) \end{array} \right) \sim \frac{1}{\cos(t)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & 1 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$



je tiefer  
endet sich





Συντεταγμένες είναι γραμμική συνάρτηση:

Πάν συνάρτηση

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = f(x)$$

Να βρούμε  $y_0$  η γενική λύση της ομογενούς συνάρτησης. Αναζητούμε

$$y(x) = z(x) \cdot y_0(x). \quad \text{Ρηλ}$$

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} z^{(i)}(x) y_0^{(n-i)}(x) + \left[ y_0^{(n)}(x) z(x) \right]$$

Porozumi'm do rovnice

(\*)

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} z^{(i)}(x) y_0^{(n-i)}(x) + a_{n-1}(x) \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} z^{(i)}(x)$$

$$y_0^{(n-1-i)}(x) + \dots + a_1 z'(x) y_0(x) +$$

$$+ z(x) \left( y_0^{(n)} + a_{n-1}(x) y_0^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y_0'' + a_0 y_0(x) \right) =$$

$= 0$

$= f(x)$

Označím-li  $z^j = u$ , dostávám  $z$  (\*)  
lineární rovnici pro  $u$  řádu  $(n-1)$ .

$$2) \quad y''(x) - \frac{x y'(x)}{x^2+1} + \frac{y(x)}{x^2+1} = 0$$

Ukázání řešení:  $y_0(x) = x$ .

Hledám další řešení tvaru  $y(x) = z(x) \cdot x$

Dostáváme:

$$0 = \frac{z(x) \cdot x}{x^2+1} - \frac{x(z'(x) \cdot x + \cancel{z(x)})}{x^2+1} + z''(x)x + 2z'(x)$$

$$0 = - \frac{z'(x) x^2}{x^2 + 1} + z''(x) x + 2z'(x)$$

Dann gilt  $z' = u$ . Daraus:

$$u'(x) = \frac{x u(x)}{x^2 + 1} - \frac{2u(x)}{x}$$

$$= \frac{-x^2 - 2}{x(x^2 + 1)} \cdot u(x)$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{0\}, \quad D_h = \mathbb{R}$$

$h(u) = 0 \Leftrightarrow u \leq 0$ , dostávám stále řešení

$u(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$  což má řešení.

Tu kde  $u$  je menší:

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = - \frac{x^2 + 2}{x(x^2 + 1)}$$

$$\text{i.e. } \log |u| = \log \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} + C$$

$$\text{Bz } \forall C \text{ } |z| \text{ invariant in } (-\infty, 0); (0, \infty)$$

$$|u| = \hat{C} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}$$

$$u = \hat{C} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} ; \hat{C} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Zu } u(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} \quad x \in (0, \infty) \quad \text{u. in } (-\infty, 0)$$

$$\text{mit } z(x) = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \log |\sqrt{x^2+1} - x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

a naborec  $f(x) = -\sqrt{x^2+1} - x \log |\sqrt{x^2+1} - x|,$

$$x \in (-\infty, 0), (0, \infty)$$

Lepešim (je treba ovčiti god.) dostaneme  
rešen! na  $\mathbb{R}$ .